Καθηγητής: Γεώργιος Λ. Καρακώστας
Ἰωάννινα, 05-06-2013

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ στο μάθημα ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1

1. [0.8] Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ἄθροισμα $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots 2013i^{2013}$.

2. [1.2] Νὰ γραφεῖ μιὰ παραμετρικὴ παράσταση της μορφῆς $z = z(t),\ t \in [-1, 6]$ τῆς πολυγωνικῆς καμπύλης $\gamma := [a, b, c]$, ὅπου $a := -6 - i,\ b := 2i,\ c := 5 + 2i$ καὶ στὴ συνέχεια νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_\gamma (z^2 + 3\sin(z) + 2\cos(z))dz$.

3. [1.0] Νὰ ἀποδειχτεῖ τὸ ἑξῆς Θεώρημα: *Οἱ ρίζες κάθε (ὄχι ἐκ ταυτότητος μηδὲν) συνάρτησης, ποὺ εἶναι ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο, εἶναι μεμονωμένα σημεῖα.*

4. [1.0] Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

5. [1.0] Ἔστω $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ οἰκογένειες τῶν μονοπαραμετρικῶν καμπυλῶν $u(x, y) = \kappa_1$ καὶ $v(x, y) = \kappa_2$, ὅπου $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \mathcal{T}\}$ καὶ κ_1, κ_2 εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, τέμνονται κάθετα μεταξὺ τους.

6. [1.4] Νὰ ἀποδειχτεῖ τὸ θεώρημα του Morrera, δηλαδὴ τὸ ἑξῆς: *Ἔστω $B(a, r)$ ἕνας δίσκος καὶ $f : B(a, r) \to \mathbb{C}$ μιὰ συνεχὴς συνάρτηση τέτοια ὥστε νὰ ἰσχύει $\int_\Delta f(z)dz = 0$, γιὰ κάθε τριγωνικὴ καμπύλη Δ, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν δίσκο. Τότε ὑπάρχει ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς f, δηλαδὴ ὑπάρχει F τέτοια ὥστε $F' = f$.*

7. [1.2] Νὰ δοθοῦν τὰ ἀναπτύγματα Taylor μὲ κέντρο τὸ σημεῖο 1 στὸν δίσκο $B(1, 1)$ καὶ στὸν δακτύλιο $\Delta(1, 1, \sqrt{2})$ τῆς συνάρτησης μὲ τύπο $f(z) := \frac{i}{z^2 - iz}$.

8. [1.0] Δίνεται μια σειρὰ $\sum z_n$. Ὁρίζουμε τὴν ποσότητα $L := \limsup |z_n|^{1/n}$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἰσχύει $L < 1$, τότε ἡ σειρὰ συγκλίνει καὶ μάλιστα, ἀπόλυτα.

9. [1.4] Νὰ ἀποδειχτεῖ τὸ 1ο Θεώρημα τοῦ Cauchy, δηλαδὴ τὸ ἑξῆς: *Ἔστω f μιὰ συνάρτηση ὁρισμένη καὶ ὁλόμορφη σὲ ἕναν τόπο $\mathcal{T}$, μὲ συνεχῆ παράγωγο, $B(a, r)$ ἕνας δίσκος, ὁ ὁποῖος μαζὶ μὲ τὴ θήκη του ἀνήκει στὸν τόπο καὶ ἔστω γ ἡ θετικὰ προσανατολισμένη περιφέρεια τοῦ δίσκου. Τότε ἰσχύει $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw,\ z \in B(z, r)$.*